القسم: رياضيات — الفصل: الأول

السنة: الثالثة — المادة: ميكانيك /2/

المحاضرة الرابعة عملي

إذا كان لدينا جسم S بشكل مجسم ناقص متجانس الكثافة وكتلته M أنصاف أقطاره a,b,c والمطلوب: 1- اكتب معادلة الجسم

2- أوجد عنصر الحجم المتناهي في الصغر

3- أوجد عزوم عطالة هذا المجسم بالنسبة لأحد أقطاره (محاوره الثلاثة)

4- أوجد عزم عطالة المجسم بالنسبة للمبدأ O

5- أوجد جداءات العطالة

6- احسب عزم العطالة بالنسبة لنقطة من محيطه $O(-a,0,0)$

الحل: 1)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

2) $dV = ?$

$$dV = dx\,dy\,dz$$

نفرض أن $\frac{X}{a}=x$, $\frac{Y}{b}=y$, $\frac{Z}{c}=z$

$$\Rightarrow X = ax \;,\; Y = by \;,\; Z = cz$$

$$\Rightarrow dV = a.b.c\,dx\,dy\,dz = a.b.c\,|J|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$\Rightarrow dV = abc\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \;,\; 0\leq r\leq R$$

$$0\leq\theta\leq\pi$$

$$0\leq\varphi\leq 2\pi$$

(3 المطلوب حساب $I_x = ?$, $I_y = ?$, $I_z = ?$

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$

$$I_{xy} = \rho \int_V z^2 \, dv = \rho \int_V z^2 \, abc\, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\alpha$$

$$z^2 = c^2 z'^2$$

$$= \rho \int_V c^2 z'^2 \, abc\, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\alpha$$

$$z'^2 = r^2 \cos^2\theta \Rightarrow \rho\, abc^3 \int r^4 \cos^2\theta \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\alpha$$

$$\Rightarrow I_{xy} = \rho\, abc^3 \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \rho\, abc^3 \frac{R^5}{5} 2\pi \left[\frac{-\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = \rho\, abc^3 \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi abc \Rightarrow I_{xy} = \rho \frac{4}{3} \pi abc \frac{c^2}{5} = \frac{Mc^2}{5}$$

$$I_{xz} = \rho \int_V y^2 \, dv = \rho\, a.b.c \int_V b^2 y'^2 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\alpha$$

$$y'^2 = r^2 \sin^2\theta \cdot \sin^2\alpha$$

$$= \rho\, ab^3c \int_0^R r^4 \, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha \, d\alpha \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$\frac{4}{3}$$

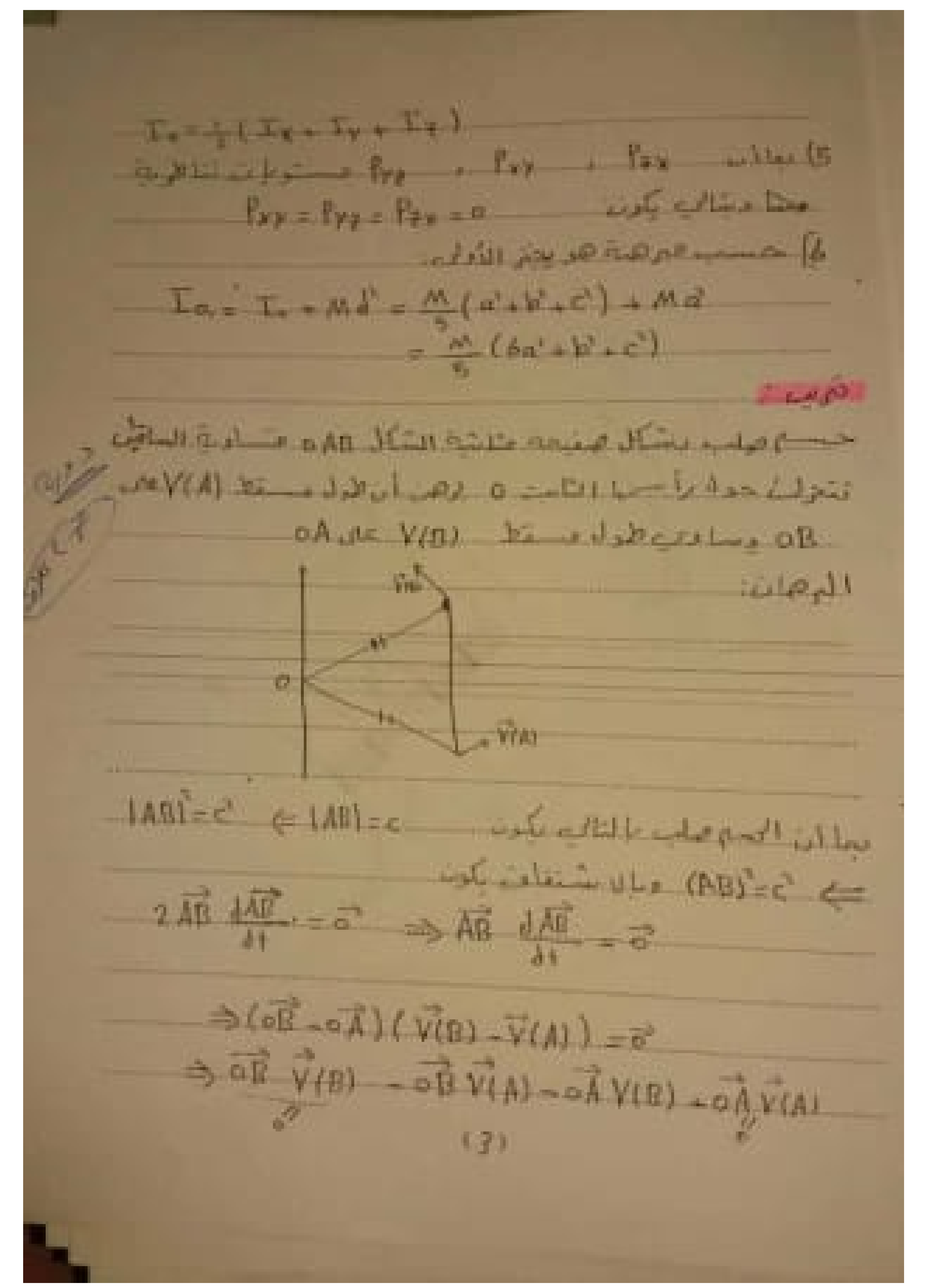
$$= \rho\, ab^3c \frac{R^5}{5} \pi \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{M}{5} b^2$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2)$$

وبنفس الطريقة نحسب I_z , I_y

(4 $I_o = ?$

$$I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = \frac{M}{5} (a^2 + b^2 + c^2)$$



$I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$

5) بما أن P_{zx} ، P_{xy} ، P_{yz} مستويات تناظرية

ومنه وبالتالي يكون $P_{xy} = P_{yz} = P_{zx} = 0$

6) حسب مبرهنة هويغنز الأولى

$$I_{a} = I_0 + Md^2 = \frac{M}{5}(a^2+b^2+c^2) + Md^2$$
$$= \frac{M}{5}(6a^2+b^2+c^2)$$

تمرين:

جسم صلب بشكل صفيحة مثلثية الشكل OAB متساوية الساقين تتحرك حول رأسها الثابت O بين أن طول مسقط V(A) على OB يساوي طول مسقط V(B) على OA

البرهان:

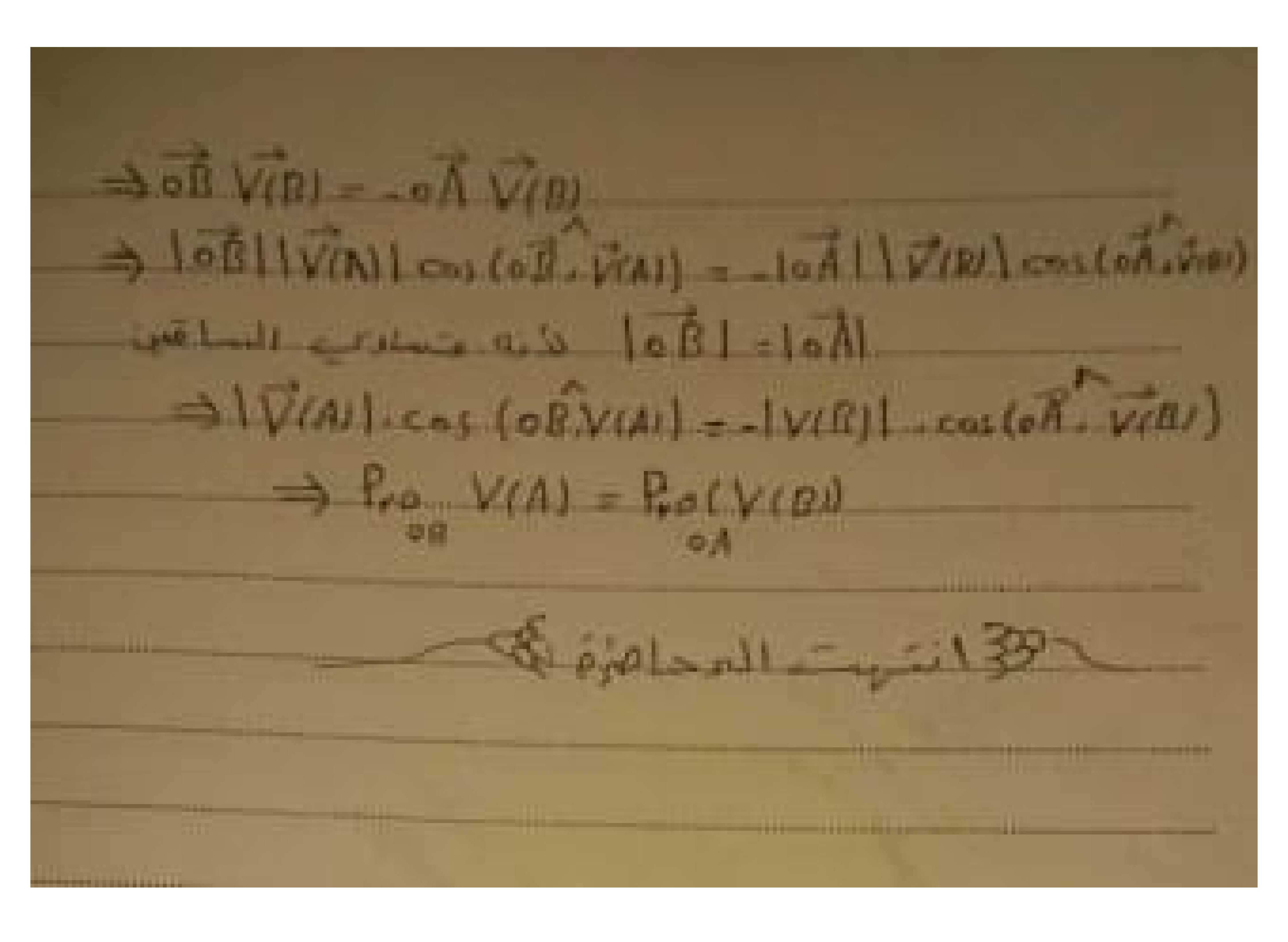
بما أن الجسم صلب بالتالي يكون $|AB| = c \Leftarrow |AB|^2 = c^2$

$\Leftarrow (AB)^2 = c^2$ وبالاشتقاق يكون

$$2\vec{AB}\,\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB}\,\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\vec{OB} - \vec{OA})(\vec{V}(B) - \vec{V}(A)) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{OB}\,\vec{V}(B) - \vec{OB}\,\vec{V}(A) - \vec{OA}\,V(B) + \vec{OA}\,\vec{V}(A)$$



$\Rightarrow \vec{OB}\,\vec{V}(B) = -\vec{OA}\,\vec{V}(B)$

$\Rightarrow |\vec{OB}|\,|\vec{V}(A)|\cos(\widehat{\vec{OB},\vec{V}(A)}) = -|\vec{OA}|\,|\vec{V}(B)|\cos(\widehat{\vec{OA},\vec{V}(B)})$

لأنه متساوي الساقين $|\vec{OB}| = |\vec{OA}|$

$\Rightarrow |\vec{V}(A)|\cdot\cos(\widehat{OB, V(A)}) = -|V(B)|\cdot\cos(\widehat{\vec{OA},\vec{V}(B)})$

$\Rightarrow \mathrm{Pro}_{OB}\, V(A) = \mathrm{Pro}_{OA}(V(B))$

انتهت المحاضرة